

А. А. Злотник

## Эмпирическое исследование устойчивости поведения показателя Хёрста

R/S-анализ подтверждает и значительно усиливает спектральный анализ: общее правило гласит, что экономические циклы настолько далеки от периодичности и настолько зависят как от длины имеющейся в нашем распоряжении выборки, так и от предпочтений наблюдателя, что вплоть до новых распоряжений их следует рассматривать как артефакты. Если верить Кейнсу, ценность таких циклов заключается прежде всего в том, что с их помощью очень удобно разбивать главы по истории экономики.

**Бенуа Мандельброт. «Фракталы, случай и финансы»**

Фрактальная статистика указывает на беспорядочность и сложность жизни, но многое таит и в себе.

**Эдгар Петерс. «Хаос и порядок на рынках капитала»**

*Статья посвящена исследованию устойчивости поведения показателя Хёрста во времени как для российских, так и для американских активов. Для этого разработана специальная методика анализа изменения этого показателя. Предлагается также метод группировки активов в соответствии с фрактальными свойствами данных финансовых временных рядов.*

### Введение

Существующие эконометрические модели описания рынка основаны на гипотезе эффективного рынка (ЕМН)<sup>1</sup> [Малюгин (2003)], которая предполагает *мартингальность* цен финансовых активов [Ширяев (2004)]. Примерно в одно время с ЕМН появилась гипотеза фрактального рынка (ФМН)<sup>2</sup> [Петерс (2004)], которую можно считать обобщением гипотезы эффективного рынка.

Показатель Херста ( $H$ ):

- используется как альтернативная волатильности мера риска финансовых активов. То есть исследуемые активы ранжируются в соответствии с абсолютным значением показателя Хёрста [Петерс (2000)];
- связан с фрактальным показателем [Ширяев (2004)]<sup>3</sup>  $d$  (fractional differencing parameter  $d$ ) в моделях ARFIMA и FIGARCH с модификациями<sup>4</sup>:

<sup>1</sup> Effective Market Hypothesis.

<sup>2</sup> Fractal Market Hypothesis.

<sup>3</sup> Ширяев пишет, что термин *фрактальный* «принят по соображениям благозвучия». Притом *fractional* переводится как *дробный*. Устоявшимися можно считать следующие термины (они широко употребляются как в статьях, приведенных в списке литературы, так и в «Основах стохастической финансовой математики»: *фрактальное броуновское движение* (*fractional Brownian motion*), *фрактальный белый шум* (*fractional white noise*), *фрактальный процесс* (*fractional process*). Распространенный в литературе по R/S-анализу термин *фрактальный анализ* (*fractal analysis*) можно рассматривать как рекламную акцию, т.к., по сути, речь идет о наборе статистических методов пригодных для исследования процессов, отличных от случайного блуждания.

<sup>4</sup> Модель FIGARCH [Baillie et al. (1996)], FIEGARCH [Bollerslev et al. (1999)].

$$d = H - \frac{1}{2}.$$

В настоящей работе предлагается методика исследования устойчивости<sup>5</sup> показателя Хёрста во времени на примере российских и американских активов: сначала мы получаем ряд значений показателя Хёрста для исходного ряда цен актива, затем для ряда цен за исключением первого года, потом за исключением первых двух лет и т. д. Для реализации этой методики была написана программа на языке GAUSS, текст которой приводится в Приложении<sup>6</sup>.

В рамках исследования:

- устанавливается, что выбор точки отсчета влияет как на абсолютное значение показателя Хёрста, так и на поведение траектории его изменения;
- показывается, что траектории изменения показателя Хёрста сохраняются при изменении частоты снятия данных (день, неделя, месяц);
- выделяются группы компаний со сходным поведением показателя Хёрста.

### Методика исследования показателя Хёрста<sup>7</sup>

Пусть  $\{P_t\}$  — ряд цен актива.

Рассмотрим накопленную доходность актива:

$$Y_t = y_1 + \dots + y_t, \quad t \in N,$$

где  $y_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$  — доходность актива<sup>8</sup>.

Степень отклонения от случая постоянной доходности:

$$R_t = \max_{i \leq t} \left( Y_i - \frac{i}{t} Y_t \right) - \min_{i \leq t} \left( Y_i - \frac{i}{t} Y_t \right) = \ln \left[ \frac{\max_{i \leq t} P_i \left( \frac{P_0}{P_t} \right)^{\frac{i}{t}}}{\min_{i \leq t} P_i \left( \frac{P_0}{P_t} \right)^{\frac{i}{t}}} \right]. \quad (1)$$

Пропорциональное изменение цен  $\left( Y_i = \frac{i}{t} Y_t \right)$  на рис. 1 показано пунктирной линией. Пусть далее:

$$S_t^2 = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (y_i - \bar{y}_t)^2 = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \left( \ln \frac{P_i}{P_{i-1}} - \ln \left( \frac{P_t}{P_0} \right)^{\frac{1}{t}} \right)^2 \quad (2)$$

<sup>5</sup> Под устойчивостью будем понимать сохранение абсолютного значения показателя Херста и поведения его траектории независимо от выбора точки отсчета.

<sup>6</sup> Находящийся в свободном доступе пакет программ Fractan 4.4 позволяет рассчитывать показатель Херста только для ряда в целом; при этом расчеты с их помощью отличаются от результатов нашей программы в тысячных. Достоверность программы, предложенной Петерсом [Петерс (2004)], вызывает сомнения и выдает неверные значения показателя Херста.

<sup>7</sup> Об истоках R/S-анализа [Мандельброт (2004)], [Петерс (2000)].

<sup>8</sup> В действительности величина  $\ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$  приблизительно равна доходности актива:  $\frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$ .

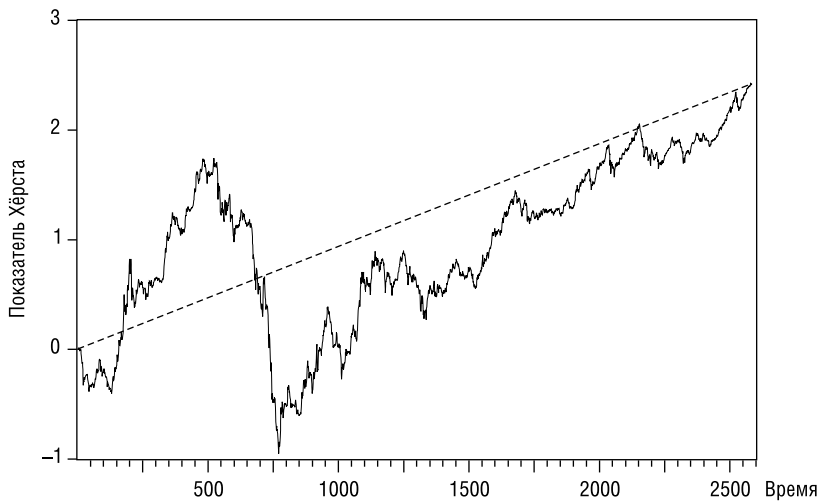


Рис. 1. Отклонение от случая пропорционального изменения цен на примере значений индекса РТС

— выборочная дисперсия;

$$Q_t = \frac{R_t}{S_t} \quad (3)$$

— нормализованный размах накопленных сумм<sup>9</sup>.

$$Q_t = \frac{R_t}{S_t} = \frac{\max_{i \leq t} \left( Y_i - \frac{i}{t} Y_t \right) - \min_{i \leq t} \left( Y_i - \frac{i}{t} Y_t \right)}{\left( \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (y_i - \bar{y}_t)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\max_{i \leq t} \left( \frac{i}{t} (-Y_t) - (-Y_i) \right) + \max_{i \leq t} \left( \frac{i}{t} Y_t - Y_i \right)}{\left( \sum_{i=1}^t (y_i - \bar{y}_t)^2 \right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{Q_t}{t^{\frac{1}{2}}} = \frac{\max_{i \leq t} \left( \frac{i}{t} (-Y_t) - (-Y_i) \right)}{\left( \sum_{i=1}^t (y_i - \bar{y}_t)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\max_{i \leq t} \left( \frac{i}{t} Y_t - Y_i \right)}{\left( \sum_{i=1}^t (y_i - \bar{y}_t)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} = K_{-y}^+ + K_{y,}^+,$$

где  $K_y^+$  — статистика Колмогорова-Смирнова<sup>10</sup>. Ширяев [Ширяев (2004)] пишет, что простой визуальный анализ статистики  $\frac{Q_t}{t^{\frac{1}{2}}}$  часто приводит к весьма содержательным статистическим выводам.

Из формул (1)–(3) следует, что величина  $Q_t$  инвариантна относительно преобразований  $y_i \rightarrow q(y_i + p)$ ,  $i \in N$  и не зависит от математического ожидания и дисперсии величин  $\{y_i\}$ ,

<sup>9</sup> Э. Ло [Lo (1991)] предложил модифицировать знаменатель дроби, однако в настоящей работе рассматривается стандартная версия модели.

<sup>10</sup> О статистике Колмогорова-Смирнова [Гаек, Шидак (1971)].

что означает непараметричность статистики  $Q_t$ . Это свойство позволяет проверять гипотезу о случайном блуждании цен, которая лежит в основе концепции эффективного рынка [Ширяев (2004)].

Феллер [Feller (1951)] показал, что для независимых и одинаково распределенных случайных величин  $\{y_t\}$  имеем:

$$\frac{R_t}{S_t} \sim ct^{\frac{1}{2}},$$

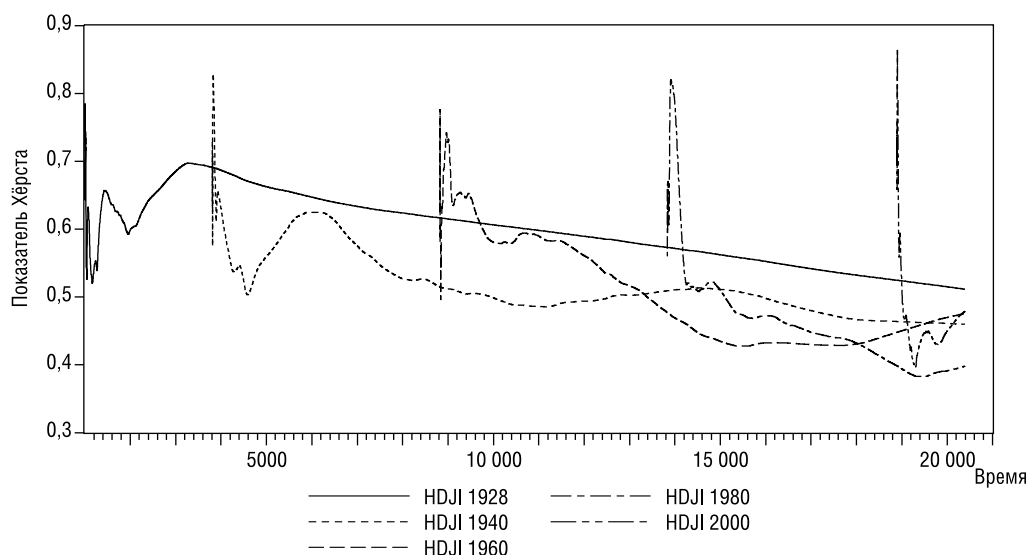
где  $c$  — константа.

Хёрст [Hurst (1951)] обнаружил, что на практике вместо ожидаемых значений  $\frac{R_t}{S_t}$  получились следующие значения:

$$\frac{R_t}{S_t} \sim ct^H \Leftrightarrow \ln \frac{R_t}{S_t} \sim \ln c + H \ln t,$$

где  $H$  (показатель Хёрста) значимо отличается от  $\frac{1}{2}$ .

Рассмотрим ряд показателей Хёрста для ежедневных значений индекса Доу-Джонса (DJI)<sup>11</sup>. Рассчитаем сначала ряд показателей Хёрста за период<sup>12</sup> с 1 октября 1928 года по 30 декабря 2005 года<sup>13</sup> — всего 19 397 значений. Затем рассчитаем ряд показателей Хёрста за период с 1929 года по 2005 год и т. д.



**Рис. 2.** Траектории поведения показателя Хёрста для ежедневных значений индекса Dow-Jones (шаг в 20 лет)

<sup>11</sup> Данные по американским активам доступны на сайте YAHOO! Finance: <http://finance.yahoo.com>

<sup>12</sup> Минимальное количество данных для расчета показателя Херста должно составлять 300 значений [Петерс (2004)].

<sup>13</sup> Первое значение индекса, доступное на сайте YAHOO! Finance, и последнее значение в 2005 году соответственно.

Полученные при этом значения показателя Хёрста различаются как по абсолютному значению, так и по тенденции изменения, причем эти различия достаточно существенны.

Проверим теперь устойчивость траекторий показателя Хёрста в случае изменения частоты снятия данных (неделя, месяц).

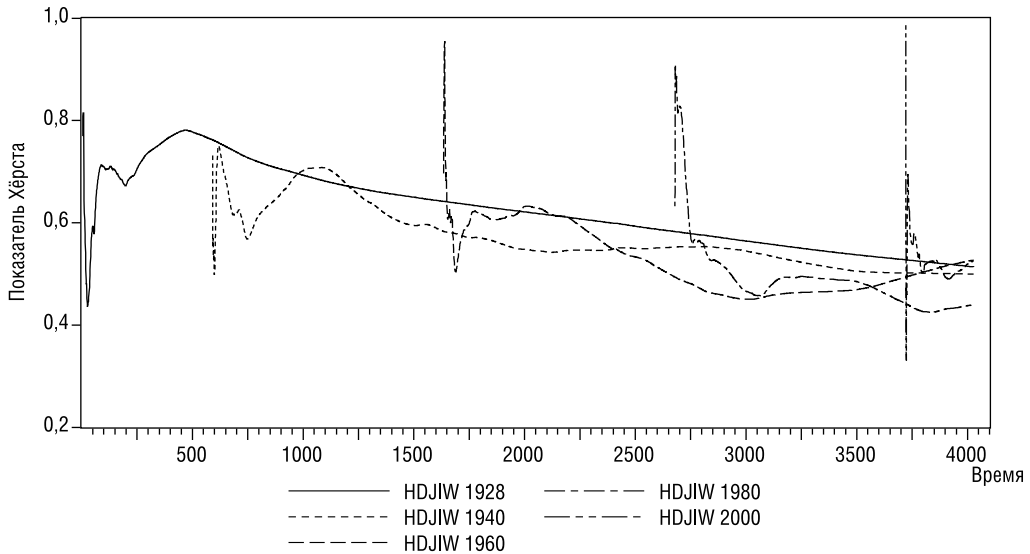


Рис. 3. Траектории поведения показателя Хёрста для еженедельных значений индекса Dow-Jones (шаг в 20 лет)

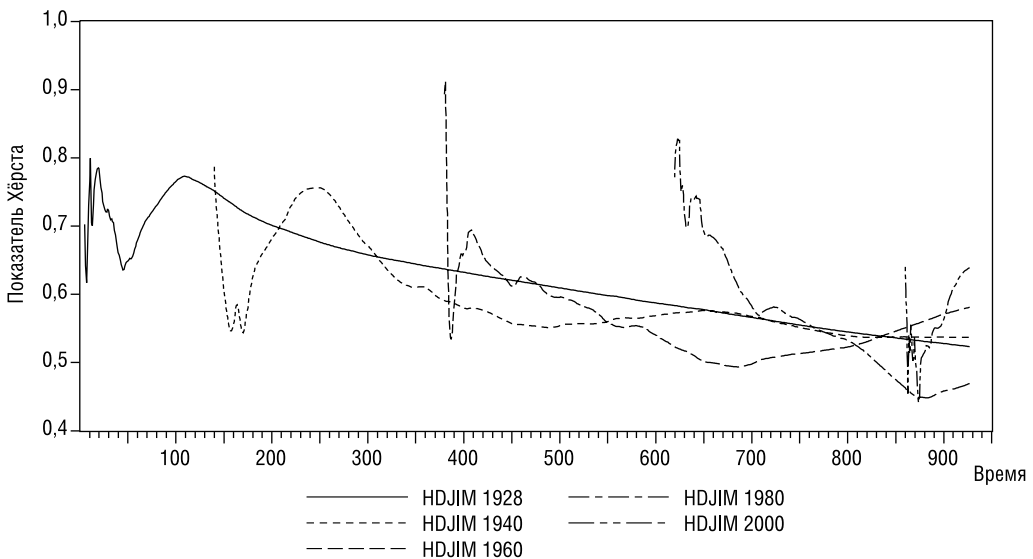


Рис. 4. Траектории поведения показателя Хёрста для ежемесячных значений индекса Dow-Jones (шаг в 20 лет)

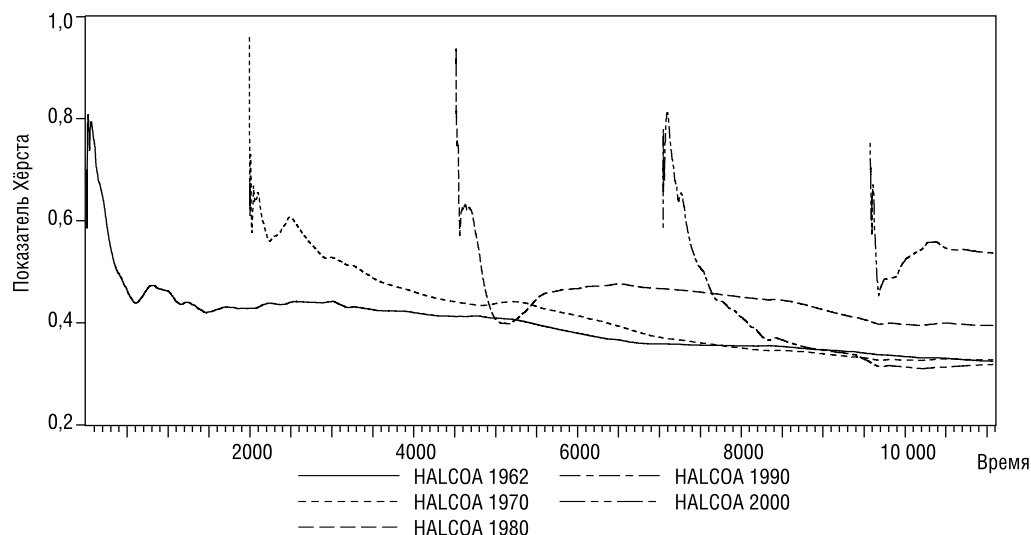
Для разных частот снятия данных абсолютные значения показателя Хёрста разнятся, а траектории остаются почти неизменными. Заметим, что, несмотря на различие абсолютных значений, ряд остается стабильно персистентным<sup>14</sup>.

По мнению Ширяева [Ширяев (2004)], существуют два основных объяснения того факта, что показатель Хёрста отличается от  $\frac{1}{2}$  (случай показателя Хёрста, равного  $\frac{1}{2}$ , соответствует случайному блужданию):

- исходные данные — независимые устойчивые случайные величины с индексом устойчивости  $\alpha = \frac{1}{H}$ , где  $H$  — показатель Хёрста;
- показатель Хёрста может отличаться от  $\frac{1}{2}$  в случае нормально распределенных зависимых величин.

В некоторых источниках [Петерс (2000), (2004)] не приводится примеров стабильно антиперсистентного ряда среди финансовых активов, из чего может сложиться ошибочное впечатление, что таких рядов на практике не существует. В качестве примера возьмем курс акций компании ALCOA<sup>15</sup>.

Как видно из рис. 5 и 6, значения показателя Хёрста для большинства траекторий стабильно антиперсистентны.



**Рис. 5.** Траектории поведения показателя Хёрста для ежедневных значений курса акций компании ALCOA (шаг в 10 лет)

<sup>14</sup> Персистентный процесс (черный шум,  $H > \frac{1}{2}$ ) имеет тенденцию следовать по направлению тренда исходного ряда. Персистентные временные ряды имеют «долгую память» — долговременную корреляцию между событиями. Антиперсистентный процесс (розовый шум,  $H < \frac{1}{2}$ ) имеет тенденцию быстро переменяться в последовательных значениях. Антиперсистентный временной ряд реверсирует чаще, чем случайный ряд. Случайный процесс (белый шум,  $H = \frac{1}{2}$ ) не тенденциозен. Первые два процесса — разновидности фрактального. Ради общности рассуждения мы склонны относить и случайный процесс к фрактальным. В литературе встречается противопоставление фрактального и случайного процессов (фрактальный — неслучайный).

<sup>15</sup> Метод расчета тот же, что и для индекса Dow-Jones, данные со 2 января 1962 года по 30 декабря 2005 года, всего — 11 076 значений.

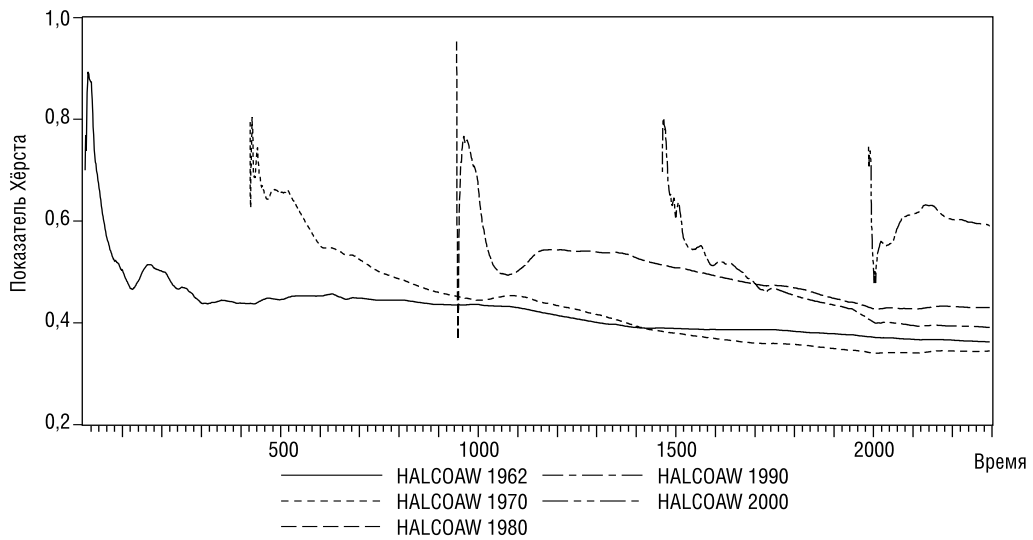


Рис. 6. Траектории поведения показателя Хёрста для еженедельных значений курса акций компании ALCOA (шаг в 10 лет)

### Группировка российских компаний

Теперь перейдем к анализу российских активов, в качестве которых рассматриваются обыкновенные акции<sup>16</sup>.

Таблица 1

#### Анализируемые активы

Компания	Период	Ряд
РАО ЕЭС	01.09.1995–30.12.2005	HEESR
Норильский никель	06.06.2001–30.12.2005	HGMKN
Лукойл	01.09.1995–30.12.2005	HLKOH
Мосэнерго	05.09.1995–30.12.2005	HMSNG
Ростелеком	01.09.1995–30.12.2005	HRTKM
РТС	01.09.1995–30.12.2005	HRTSI
Сбербанк	29.01.1997–30.12.2005	HSBER
Сибнефть	05.09.1997–30.12.2005	HSIBN
Сургутнефтегаз	05.01.1997–30.12.2005	HSNGS
ЮКОС	18.06.1997–30.12.2005	HYUKO

Началом периода будет первое изменение цены (то есть, если первые несколько дней цена не менялась, то данные начинают считываться с последнего из них).

Применяя методику, предложенную в предыдущем разделе, анализируемые активы группируем по трем критериям.

<sup>16</sup> Данные по российским активам доступны на сайте Российской Торговой Системы: <http://www.rts.ru>

1. Постоянство тенденции изменения показателя Хёрста. Изменение траектории может свидетельствовать о фундаментальных переменах в свойствах исследуемого актива.

*Таблица 2*

**Группировка рядов по постоянству процесса**

Характеристика процесса	Ряд
Постоянен <sup>17</sup>	HEESR, HLKOH, HRTKM, HRTSI
Редко постоянен	HGMKN, HMSNG, HSNBS
Непостоянен	HSBER, HSIBN, HYUKO

2. Уровень волатильности показателя Хёрста<sup>18</sup>. Чем меньше волатильность, тем надежнее актив.

*Таблица 3*

**Группировка рядов по степени волатильности**

Характеристика процесса	Ряд
Не очень часто сверхволатилен	HEESR, HMSNG, HRTKM, HRTSI
На грани	HGMKN, HSIBN
Очень часто сверхволатилен	HLKOH, HSBER, HSNBS, HYUKO

3. Фрактальные свойства актива — персистентность, антиперсистентность, случайность.

*Таблица 4*

**Группировка рядов по предсказуемости**

Характеристика процесса	Ряд
Стабильно персистентен	HEESR, HGMKN, HMSNG, HSBER
Персистентен <sup>19</sup>	HRTKM, HRTSI
Значения как персистентны, так и антиперсистентны	HLKOH, HSIBN, HSNBS, HYUKO

Результат группировки в целом соответствует действительности. Например, непостоянство, сверхволатильность и резкие различия фрактальных свойств ряда показателей Хёрста ЮКОСа связаны с изменением ситуации вокруг компании в 2002 году. С другой стороны, РАО ЕЭС известен как надежный актив, поэтому показатель Хёрста будет стабильно персистентен, постоянен и его волатильность не так высока.

**Выводы и перспективы**

В работе показано, что выбор точки отсчета существенно влияет на устойчивость показателя Хёрста. Таким образом, использование его абсолютных значений для ранжирования активов сомнительно. В то же время траектории поведения показателя Хёрста сохраняются при изменении частоты снятия данных.

<sup>17</sup> Постоянен в некотором подходящем смысле, то есть, когда колебания незначительны.

<sup>18</sup> Стандартное отклонение ряда показателей Херста.

<sup>19</sup> Как правило, персистентен, однако встречаются антиперсистентные значения.



В соответствии с предложенной методикой анализа выделены группы российских компаний. Выполненное исследование ведет к установлению оптимального периода расчета показателя Хёрста. Для этого необходимо определить критерии, по которым данный период может быть рассчитан. Это улучшит методы группировки активов и позволит использовать показатель Хёрста во фрактальных моделях ARCH-семейства.

### **Список литературы**

- Гаек Я., Шудак З. Теория ранговых критериев. М.: Наука, 1971.
- Малюгин В. И. Рынок ценных бумаг: Количественные методы анализа / Учеб. пособие. М.: Дело, 2003.
- Мандельброт Б. Фракталы, случай и финансы / Пер. с англ. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная хаотическая динамика», 2004.
- Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка / Пер. с англ. М.: Мир, 2000.
- Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков: применение теории хаоса в инвестициях и экономике / Пер. с англ. М.: Интернет-трейдинг, 2004.
- Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1: Факты и модели. М.: ФАЗИС, 2004.
- Baillie R. Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics // *Journal of Econometrics*. 1996, № 73.
- Baillie R., Bollerslev T., Mikkelsen H. Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity // *Journal of Econometrics*. 1996. № 74.
- Bollerslev T., Mikkelsen H. Long — term equity anticipation securities and stock market volatility dynamics // *Journal of Econometrics*. 1999. № 92.
- Feller W. The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables/*Annals of Mathematical Statistics*. 1951. № 22.
- Hurst H. Long term storage capacity of reservoirs / *Transactions of the American Society of Civil Engineers*. 1951. № 116.
- Lo A. W. Long-term memory in stock market prices // *Econometrica*. 1991. № 59.

### **Приложение**

```
/* Программа PSAXIS.gauss
* Входной файл: <Input_file>.prn содержит столбец цен P_i
* Выходной файл: <Output_File>.out содержит столбец показателей Хёрста H_i
* Вспомогательные файлы: ln(RS).prn, ln(t).prn хранят промежуточные данные, необходимые для
корректной работы программы/

new; #lineson;

load sret[] = <Input_file>.prn;

price1 = sret[,1]; n = int(Rows(price1));
starting_point=1; // starting_point -точка отсчета
price = price1[starting_point:n]; n = int(Rows(price));
h = (ln(price[2:n])/price[1:n-1]));
n = int(Rows(h)); //эквивалентно n = n-1

output file = test\ln(RS).prn reset;
output file = test\ln(t).prn reset;
output file = <Output_File>.out reset;
```

```

t = 2; // При t=1: St[1]\equiv 0 => ln(Rt/St) == бесконечность
// При t=2: Rt[2]=St[2] => ln(Rt/St) == 0
do while t<=n;
i = 1; middle = 0;
do while i<=t; middle = middle+h[i]; i = i+1; endo;
middle = middle/t;
j = 1;
St = 0; //соответствует случаю j = 1
max = 0; min = 0; HUpper = 0; // соответствует случаю j = t
do while j<=t;
HUpper = HUpper+h[j];
if HUpper-j*middle>max;
max = HUpper-j*middle;
endif;
if HUpper-j*middle<min;
min = HUpper-j*middle;
endif;
St = St+(h[j]-middle)^2;
j = j+1;
endo;
Rt = max-min;
St = (St/t)^(1/2);
output file = test\ln(RS).prn on; print ln(Rt/St);
output file = test\ln(t).prn on; print ln(t);
t = t+1;
endo;

load vector[] = test\ln(RS).prn; Y = vector[,1];
load vector[] = test\ln(t).prn; X = vector[,1];

j = 3;
//при j = 1 получаем H=0
//при j = 2 ols выдает ошибку
n = rows(Y); //эквивалентно n = rows(X);

do while j<=n;
Y1 = Y[1:j];
X1 = X[1:j];
//вызываем функцию ols
__output = 0;
{vnam,m,b,stb,vc,stderr,sigma,cx,rsq,resid,dwstat}=ols(0,Y1,X1);
output file=<Output_File>.out on;
print b[2]; //оценка показателя Хёрста
j = j+1;
endo;
end.

```